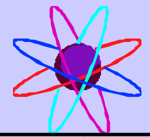
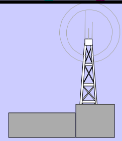
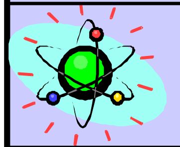
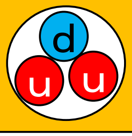
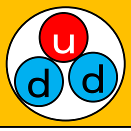
素粒子の分類

●力の分類

	力の種類	力を媒介する粒子	力が働く素粒子
	強い力	グルーオン	クォーク
	電磁力	光子	クォーク 電子、ミュー粒子、タウ粒子
	弱い力	W粒子 Z粒子	クォーク 電子、ミュー粒子、タウ粒子 ニュートリノ
	重力	グラビトン	質量を持つすべての粒子

原子核を構成している陽子、中性子は、それぞれクォーク3個から構成されている。
陽子＝アップu×2＋ダウンd×1
中性子＝アップu×1＋ダウンd×2

陽　子


中性子


電子、ミュー粒子、タウ粒子の3つとニュートリノをあわせて“レプトン”という

最近この他にヒッグス粒子というものが見つかったらしい

●素粒子の分類

重力は無視して構わないほど弱いため対象から除きました

素粒子のグループ	働く力	Ⅰグループ	Ⅱグループ	Ⅲグループ
クォーク	強い力、電磁力、弱い力	アップクォーク	チャームクォーク	トップクォーク
		ダウンクォーク	ストレンジクォーク	ボトムクォーク
レプトン	電磁力、弱い力	電子	ミュー粒子	タウ粒子
	弱い力	電子ニュートリノ	ミューニュートリノ	タウニュートリノ

素粒子に働く力は、現在発見されているもので4つ。その働く力で素粒子を分類すると、クォークとレプトンに分かれる。レプトンの電子、ミュー粒子、タウ粒子にはそれぞれ対応した（関係を持つ）3種類のニュートリノがある。現在までに確認されているものでⅠ～Ⅲまでの3グループ（世代とも言う）がある。これらクォークとレプトン12種類には、それぞれに対応した反粒子（反対の性質を持つ粒子）が存在する。

素粒子の標準理論

標準理論の数式

現在知られている物質同士が相互作用する際の4つの力、強い力、電磁気力、弱い力、重力のうち、重力を除いた3つの力の作用を数学的に表した式を、簡略化させて記述すると以下のようになる。

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \boxed{-(1/4)\cdot F_{\mu\nu}\cdot F^{\mu\nu}} \\
&+ \boxed{i\overline{\Psi}\cdot \not{D}\cdot \Psi \ + \ hc} \\
&+ \boxed{\overline{\Psi}_i \cdot Y_{ij} \cdot \Psi_j \cdot \Phi \ + \ hc} \\
&+ \boxed{|D_\mu \cdot \Phi|^2 \ - \ V(\Phi)}
\end{aligned}
$$

[A項]上記3つの力が働く場の性質を表す

[B項]物質を構成する素粒子の性質、および電磁気力を伝える光子、強い力を伝えるグルーオン、弱い力を伝えるW粒子、Z粒子（これらをゲージ粒子という）との相互作用を表す。hcはエルミート共役記号、計算結果が実数となるための数学的工夫

[C項]物質を構成する素粒子とヒッグス粒子との相互作用を示す
hcはエルミート共役記号

[D項]ゲージ粒子とヒッグス粒子との相互作用を示す

この式は、現在のすべての実験結果を説明可能

以下、この式の意味を簡単に解説する。

ヒッグス粒子とは、素粒子に質量（動きにくさをもたらす慣性質量）を与える粒子。別途解説

この式は、欧州原子核研究機構（CERN）の敷地の石板に刻まれている数式

古典力学とオイラー＝ラグランジュ方程式

式の説明で、左辺の$\mathcal{L}$はラグラジアン密度といい、これを空間で積分したものをラグラジアンLという。 $L = \int \mathcal{L} \ dx^3$ ・・・①

Lは、一般化座標q1,q2,q3・・・とその時間微分q1'q2'q3'・・・の関数。L＝L(q1,q2,q3・・・ ,q1'q2'q3'・・・)

作用Sを、$S = \int L \ dt$ ・・・② と定義する。ここで最小作用の原理を適用する。

「**最小作用の原理**」とは、この宇宙で起こりえる様々な事象を数学の関数で示すとする。すると実に様々な関数が考えられるが、現実に起こる事象、即ち自然法則に則った事象は一つしかなく、それはこの作用Sが最小になる場合に限られるというもの。これを数学的に示したものを最小作用の原理と呼ぶ。従って作用は極値（停留点）を取る。極値ではSの変化量はゼロとなる。すなわち、$\delta S = 0$ となる。

$\delta S = \int dt \ L(q1+dq1, q2+dq2, q3+dq3\cdots, q1'+dq1', q2'+dq2', q3'+dq3'\cdots) - L(q1,q2,q3\cdots, q1'q2'q3'\cdots)$ ・・・③

これをテイラー展開すると、

$\delta S = \int dt \ ((\partial L/\partial q1)\cdot dq1 + (\partial L/\partial q2)\cdot dq2 + (\partial L/\partial q3)\cdot dq2 + \cdots + (\partial L/\partial q1')\cdot dq1' + (\partial L/\partial q2')\cdot dq2' + (\partial L/\partial q3)\cdot dq3' + \cdots)$

参考・ラグラジアン形式

$\delta S = \int_{t1}^{t2} dt \left(\sum_i \left((\partial L / \partial qi) \cdot dqi + (\partial L / \partial qi') \cdot dqi' \right) \right)$

$\delta S = \int_{t1}^{t2} dt \left(\sum_i \left((\partial L / \partial qi) - d(\partial L / \partial qi') / dt \right) \cdot dqi \right.$

$\left. + \sum_i \left((d(\partial L / \partial qi') / dt) \cdot dqi + (d(\partial L / \partial qi') \cdot dqi') \right) \right)$

この項は、“t”の部分積分として、t1からt2まで定積分を行うと、$[(\partial L / \partial qi') \cdot dqi]_{t1}^{t2}$

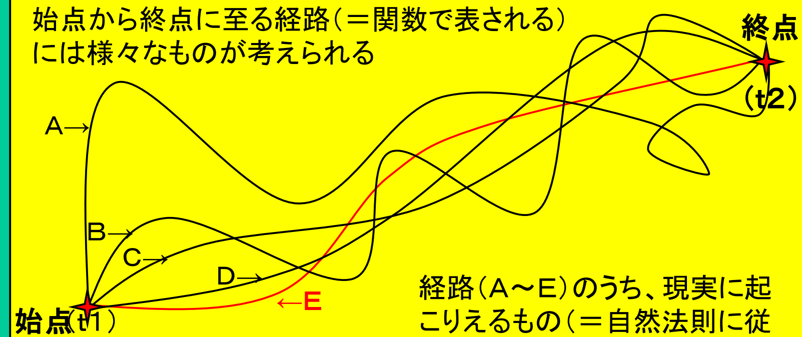
いずれ経路をとっても始点、終点は同じのため、この値は0となる。

最小作用の原理に従って、$\delta S = 0$となる条件は、$(\partial L / \partial qi) - d(\partial L / \partial qi') / dt = 0$

…④　これが解析力学の、**オイラー＝ラグランジュ方程式**である。

最小作用の原理とは

始点から終点に至る経路（＝関数で表される）には様々なものが考えられる



経路（A～E）のうち、現実に起こりえるもの（＝自然法則に従っているもの）は、Eのみである。それ以外は頭の中だけで考えられたもので、実際には起こりえない

オイラー＝ラグランジュ方程式

物理学における基本方程式は、オイラー＝ラグランジュ方程式で書くことができる。例えばニュートン方程式　$F = ma$　を導くラグラジアンLを以下の通り定義する。

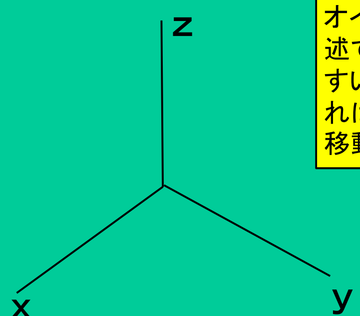
$L = T - V$　（Tは運動エネルギー、Vはポテンシャルエネルギー）　$L = (1/2) \cdot m \cdot v^2 - V$　これをオンラー＝ラグランジュ方程式に代入する。

$-\nabla L - d(m \cdot v)/dt = -\nabla V - m \cdot a = 0$　よって、$F = m \cdot a = -\nabla V$　これは**ニュートン方程式と同等**である。

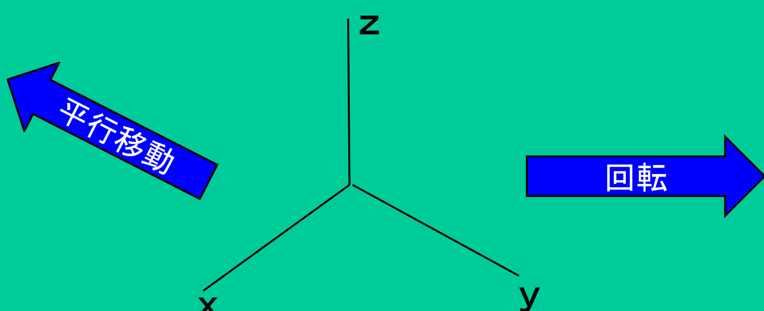
オイラー＝ラグランジュ方程式の意味

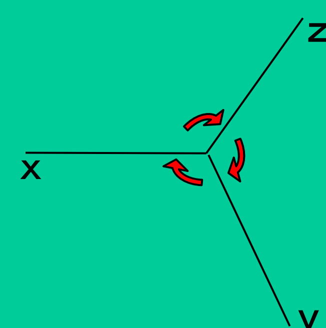
オイラー＝ラグランジュ方程式は座標系に関係なく運動を記述できる。以下の直交座標を考える。座標系は人間が扱いやすい方法で自由に決められる。つまり限定された（こうでなければならない）座標などない。座標の原点を左のように平行移動しても、右のように軸の方向を回転させても構わない

自然法則は、座標を平行移動させさても、あるいは回転させても変わらない。同様に、ラグラジアンは座標系を変えても変わらない。これを物理学的には、ラグラジアンに**並進対称性**がある。加えて**回転対称性**がある。という言い方をする



直交（XYZ）座標





参考・ラグラジアン形式

ラグラジアン密度

特殊相対性理論によると時間と空間は対等である。従ってラグラジアン Lも時間と空間が同じ形になるように改める必要がある。そこでラグラジアン密度$\mathcal{L}$を考える
時間と空間の場を表す連続関数をΦとする。Φは時間tと空間の3成分（x, y, z）の関数である。ラグラジアン密度$\mathcal{L}$を、ΦとΦの空間微分∇Φ、時間微分Φ'の関数として、

$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\Phi, \nabla\Phi, \Phi')$ とすると、オイラー＝ラグランジュ方程式も少々変更して、

$(\partial\mathcal{L}/\partial\Phi) + \nabla(\partial\mathcal{L}/\partial\nabla\Phi) + \partial(\partial\mathcal{L}/(\partial\phi'))/\partial t = 0$ ・・・⑤ となる。

時間と空間が対等になるようにラグラジアンに修正を加えたラグラジアン密度には、式にあらたな対称性を付加したものとみなせる。この対称性を**ローレンツ対称性**という

ここでは、上記⑤を使って、電磁気学の基本方程式であるマクセル方程式を導こう。
マクセル方程式は以下の4つで表される。（簡単にするため、電荷、電流のない空間を考える。以下、$\boldsymbol{E}$ は電場、$\boldsymbol{H}$ は磁場）

$\nabla\cdot\boldsymbol{E} = 0$ ・・・⑥ ガウスの法則

$\nabla\cdot\boldsymbol{H} = 0$ ・・・⑦ 磁場についての渦なしの法則

$\nabla\times\boldsymbol{H} - (1/c)\cdot(\partial\boldsymbol{E}/\partial t) = 0$ ・・・⑧ アンペールの法則

$\nabla\times\boldsymbol{E} + (1/c)\cdot(\partial\boldsymbol{H}/\partial t) = 0$ ・・・⑨ ファラデーの電磁誘導の法則

なお、cは光速である。ここでベクトルポテンシャル$\boldsymbol{A}$ とスカラーポテンシャルA を以下のように導入する。

$\boldsymbol{H} = \nabla\times\boldsymbol{A}$ ・・・⑩ 、 $\boldsymbol{E} = -\nabla \mathrm{A} - (1/c)\cdot\boldsymbol{A}'$ ・・・⑪

さらに、あらためてラグラジアン密度$\mathcal{L}$を、

$\mathcal{L} = -(1/2)\cdot(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{E}-\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{H}) - \boldsymbol{E}\cdot(\nabla \mathrm{A} + (1/c)\cdot\boldsymbol{A}') - \boldsymbol{H}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A})$ ・・・⑫ と選ぶ。 これを⑤に代入して、$\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{H}$、$\boldsymbol{A}$、Aを独立した変数（つまりオイラー＝ラグランジュ方程式の関数Φ）として微分すると、

・$\boldsymbol{E}$をΦとして $-\boldsymbol{E} - (\nabla \mathrm{A} + (1/c)\cdot\boldsymbol{A}') = 0$ すなわち $\boldsymbol{E} = -\nabla \mathrm{A} - (1/c)\cdot\boldsymbol{A}'$ これは⑪である。

・$\boldsymbol{H}$をΦとして $\boldsymbol{H} - \nabla\times\boldsymbol{A} = 0$ すなわち $\boldsymbol{H} = \nabla\times\boldsymbol{A}$ これは⑩。

・$\boldsymbol{A}$と$\boldsymbol{A}'$をΦとΦ'として $-(1/c)\cdot\boldsymbol{E}' + \nabla\times\boldsymbol{H} = 0$ これは⑧。

・AをΦとして $-\nabla\cdot\boldsymbol{E} = 0$ これは⑥。

ここで**ポイント**は、ラグラジアンLおよびラグラジアン密度$\mathcal{L}$は、結果としてオイラー＝ラグランジュ方程式から、物理学の基本方程式（ニュートン方程式やマクセル方程式など）が導かれるように意識的に**選んでやる**。ということ。最初からラグラジアンの形が明らかになっているわけではない。

上記⑩と⑪を組み合わせれば、マクセル方程式⑥～⑨が得られる。すなわち、このオイラー＝ラグランジュ方程式（式⑫）は、**マクセル方程式と同等**である。

ゲージ対称性（QED）

量子電磁気学（QED） ※電磁気学を、量子力学をベースに構成しなおした物理学の一分野　（QED　＝　Quantum electro dynamics）

この世界には電磁気力しかなく、電荷を持ち物質を構成する電子などの素粒子と、電磁気力を媒介する光子が存在するものとして、それらの振る舞いを記述する**場の方程式**としては、前者はディラック方程式（「図17」参照）、後者はマクセル方程式に相当する。それらを合わせてラグラジアン形式（ラグラジアン密度）で表すと、

$$\mathcal{L} = \boxed{i\overline{\Phi}\cdot\gamma^{\mu}\cdot\partial_{\mu}\Phi - m\cdot\overline{\Phi}\cdot\Phi} + \boxed{-(1/4)\cdot F_{\mu\nu}\cdot F^{\mu\nu} - j^{\mu}\cdot A_{\mu}} \quad \cdots ⑬$$

（μ, ν ＝0, 1, 2, 3、0は時間成分t、1, 2, 3は空間成分x, y, z　に相当する）

ディラック方程式のラグラジアン密度　マクセル方程式のラグラジアン密度

iは虚数単位、γはディラック方程式のガンマ行列（γ^{μ}、μ＝0,1,2,3、γ^0 ＝B、γ_{μ} ＝－iB・A_{μ}、μ＝1,2,3）、Φは電子の波動関数、$\overline{\Phi}$はそのエルミート共役 $\overline{\Phi}=\Phi^{\dagger}$、$\partial_{\mu} = \partial_{\mu}/\partial x^{\mu}$、μ＝0,1,2,3、mは電子の質量。A、Bは4×4の正方行列。
上記ラグラジアン部分にオイラー＝ラグランジュ方程式を適用すると、ディラック方程式が導かれる。（※$\overline{\Phi}$を独立変数として微分する）

$$\partial\mathcal{L}/\partial\overline{\Phi} - \partial_{\mu}\partial\mathcal{L}/\partial\,\partial_{\mu}\overline{\Phi} = \boxed{i\gamma^{\mu}\cdot\partial_{\mu}\cdot\Phi - m\cdot\Phi = 0}$$

これはディラック方程式そのものである

⑬のベクトルポテンシャルとスカラーポテンシャルを合わせた　4次元ベクトル A_{μ} を電磁気学の分野に限定せず、**ゲージ場**と呼ぶ。また4×4のテンソル $F_{\mu\nu}$ についても電磁気学以外の分野も含めて、**場の強さ**と呼ぶ。

$F_{\mu\nu}$ は電磁場テンソルといい、$F_{\mu\nu} = \partial_{\mu}A_{\nu} - \partial_{\nu}A_{\mu}$ で定義される。これを行列形式で書くと、

共変テンソル

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E1 & -E2 & -E3 \\ E1 & 0 & B3 & -B2 \\ E2 & -B3 & 0 & B1 \\ E3 & B2 & -B1 & 0 \end{pmatrix}$$

反変テンソル

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E1 & E2 & E3 \\ -E1 & 0 & B3 & -B2 \\ -E2 & -B3 & 0 & B1 \\ -E3 & B2 & -B1 & 0 \end{pmatrix}$$

右辺は反対称テンソル（左斜め線で分けると、右上の成分と左下成分が符号が反対で同じもの）になっている。即ち $F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}$

$F_{\mu\nu}\cdot F^{\mu\nu} = F_{\mu\nu}(\partial^{\mu}A^{\nu} - \partial^{\nu}A^{\mu}) = F_{\mu\nu}\partial^{\mu}A^{\nu} - F_{\mu\nu}\partial^{\nu}A^{\mu}$　第2項でμ νを入替え、$= F_{\mu\nu}\partial^{\mu}A^{\nu} - F_{\nu\mu}\partial^{\mu}A^{\nu} = F_{\mu\nu}\partial^{\mu}A^{\nu} + F_{\mu\nu}\partial^{\mu}A^{\nu} = 2F_{\mu\nu}\partial^{\mu}A^{\nu}$

$= 2(\partial_{\mu}A_{\nu} - \partial_{\nu}A_{\mu})\cdot\partial^{\mu}A^{\nu}$ ・・・(1)　$= 2(\partial_{\mu}A_{\nu} - \partial_{\nu}A_{\mu})\cdot g^{\alpha\mu}\cdot g^{\beta\nu}\cdot\partial_{\alpha}A_{\beta}$

※計量テンソルgを使って反変ベクトルと共変ベクトルを入れ替えて

$= 2g^{\alpha\mu}\cdot g^{\beta\nu}\cdot(\partial_{\alpha}A_{\beta} - \partial_{\alpha}A_{\beta})\cdot\partial_{\mu}A_{\nu} = 2(\partial^{\mu}A^{\nu} - \partial^{\nu}A^{\mu})\cdot\partial_{\mu}A_{\nu}$ ・・・(2)

ここでオイラー＝ラグランジュ方程式を適用

$\partial\mathcal{L}/\partial A_{\mu} - \partial_{\nu}\partial\mathcal{L}/\partial\,\partial_{\nu}A_{\mu} = -j^{\mu} + \partial_{\nu}(1/4)\cdot((\partial(1)/\partial\,\partial_{\nu}A_{\mu}) + (\partial(2)/\partial\,\partial_{\nu}A_{\mu})) = -j^{\mu} + \partial_{\nu}(1/2)\cdot((\partial^{\mu}A^{\nu} - \partial^{\nu}A^{\mu}) + (\partial^{\mu}A^{\nu} - \partial^{\nu}A^{\mu})) = -j^{\mu} + \partial_{\nu}(\partial^{\mu}A^{\nu} - \partial^{\nu}A^{\mu}) = -j^{\mu} + \partial_{\nu}F^{\mu\nu} = 0$

即ち、$\partial_{\nu}F^{\mu\nu} = j^{\mu}$ ・・・(3)　この式は、マクセル方程式と同じである。

※*B*は磁束密度　真空中では磁場*H*に対して、*B*＝μ・*H*（μは真空の透磁率）

ゲージ対称性　（ゲージ不変性）

粒子や相互作用を示す場は、波動関数で示される。波動関数は、Ψ＝ψ（x）（独立変数xは、時間と空間3次元分の変数　x0＝t、x1＝x、x2＝y、x3＝z）。
波動関数は位相を持っている。ψ（x）から位相θだけずれたもの

$$\Psi' = \mathrm{EXP}(-ic\cdot\theta)\cdot\psi(x) \quad \cdots ⑭$$

iは虚数単位 c は光速 θ は時間空間の関数

について考える。位相は見方によって変わっても、ラグランジアンの形は変わらないものとする。ここで任意の自由度としてθをゲージといい、これを自由に取ることを、（局所）**ゲージ変換**と呼ぶ。また、ベクトルポテンシャル*A*に対して、任意のスカラー関数をχとしたとき、

$$A \rightarrow A + \nabla\chi \quad \cdots ⑮$$

としても、$\nabla\times(\nabla\chi)=0$　であることより、マクセル方程式の形は変わらない。なお、χは任意により、$\chi=\theta$　とする。

以上のことから、ラグラジアン密度⑬に　⑭（Φ’＝EXP（−ic・θ）・ Φ と置きなおす）と　⑮（$\chi=\theta$ とする）に変換を施してみる。（$\mathcal{L}'$ は$\mathcal{L}$ をゲージ変換したもの）

$$\mathcal{L}' = i\overline{\Phi}'\cdot\gamma^{\mu}\cdot\partial^{\mu}\Phi' - m\cdot\overline{\Phi}'\cdot\Phi' - (1/4)\cdot F'_{\mu\nu}\cdot F'^{\mu\nu} - j^{\mu}\cdot A'_{\mu} = (i\overline{\Phi}\cdot\gamma^{\mu}\cdot\partial_{\mu}\Phi - m\cdot\overline{\Phi}\cdot\Phi + c\cdot\overline{\Phi}\cdot\gamma^{\mu}\cdot\Phi\cdot\partial_{\mu}\theta)\cdot(\mathrm{EXP}(ic\cdot\theta)\cdot\mathrm{EXP}(-ic\cdot\theta)) +$$

$$(-1/4)\cdot(\partial_{\mu}(A_{\nu}+\partial_{\nu}\theta) - \partial_{\nu}(A_{\mu}+\partial_{\mu}\theta))\cdot(\partial^{\mu}(A^{\nu}+\partial_{\nu}\theta) - \partial^{\nu}(A^{\mu}+\partial_{\mu}\theta)) - j^{\mu}\cdot(A_{\mu}+\partial_{\mu}\theta) = \mathcal{L} +$$

$$(-1/4)\cdot(\boxed{\partial_{\mu}A_{\nu}\cdot\partial^{\mu}\partial_{\nu}\theta} - \boxed{\partial_{\mu}A_{\nu}\cdot\partial^{\nu}\partial_{\mu}\theta} + \boxed{\partial_{\mu}\partial_{\nu}\theta\cdot\partial^{\mu}A^{\nu} - \partial_{\mu}\partial_{\nu}\theta\cdot\partial^{\nu}A^{\mu}} + \boxed{\partial_{\mu}\partial_{\nu}\theta\cdot\partial^{\mu}\partial_{\nu}\theta - \partial_{\mu}\partial_{\nu}\theta\cdot\partial^{\nu}\partial_{\mu}\theta} - \boxed{\partial_{\nu}A_{\mu}\cdot\partial^{\mu}\partial_{\nu}\theta} + \boxed{\partial_{\nu}A_{\mu}\cdot\partial^{\nu}\partial_{\mu}\theta}$$

相殺　相殺　相殺　相殺

$$-\boxed{\partial_{\nu}\partial_{\mu}\theta\cdot\partial^{\mu}A^{\nu} + \partial_{\nu}\partial_{\mu}\theta\cdot\partial_{\nu}A_{\mu}} + \boxed{\partial_{\nu}\partial_{\mu}\theta\cdot\partial^{\mu}\partial_{\nu}\theta - \partial_{\nu}\partial_{\mu}\theta\cdot\partial^{\nu}\partial_{\mu}\theta}) - (\boxed{c\cdot\overline{\Phi}\cdot\gamma^{\mu}\cdot\Phi - j^{\mu}})\,\partial_{\mu}\theta = \mathcal{L}$$

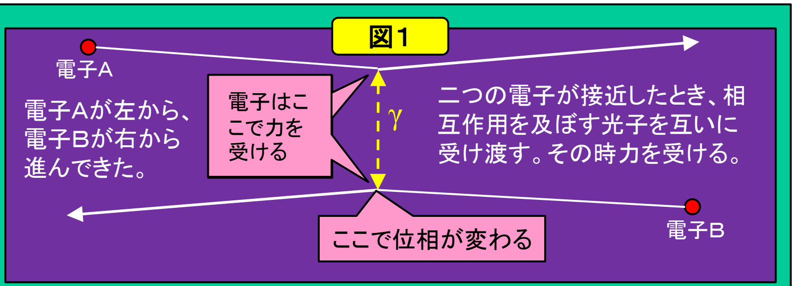
連続の方程式（$j^{\mu} = c\overline{\Phi}\gamma^{\mu}\Phi$）により0となる

ゲージ理論（QED）

よって、ラグラジアン密度$\mathcal{L}$ に以下のゲージ変換を施したとしても$\mathcal{L}$ の形は変わらない。

$\psi \rightarrow \psi'(x) = \mathrm{EXP}(-ic\cdot\theta)\cdot\psi(x)$ 、$\boldsymbol{A} \rightarrow \boldsymbol{A}' = \boldsymbol{A} + \nabla\theta$

すなわち、$\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}' = \mathcal{L}$



このように、量子電磁気学におけるラグラジアン関数（式⑫）に、位相およびベクトルポテンシャルに対する任意の変化分（これらをゲージという）を加えても、ラグラジアン密度の形は変わらない。このことを**ゲージ対称性**があるという。
ここでは、電子の波動関数の位相が変化したことが、電子から光子（電磁波）が放出されたことを表していると言える。そのことを示したのが、図1となる。図1では、電子Aの位相が変化すると同時に電子Aからが光子γが放出され、電子Bがそれを受け取ると同時に電子Bの位相が変化する。その際、電子Aと電子Bは力を受ける
これが電磁気力が働く仕組みである。

光子の質量

クライン＝ゴルドン方程式（図17「ディラック方程式」参照）をラグラジアン形式に変換すると、

$\mathcal{L} = (-1/2)\cdot(\nabla\Phi\cdot\nabla\Phi - (1/c)^2\cdot\Phi\cdot\Phi + (c\cdot m/\hbar)^2\cdot\Phi\cdot\Phi$ ・・・⑯ （m　は粒子の質量）　これにオイラー＝ラグランジュ方程式を適用すると、クライン－ゴルドン方程式$(\nabla^2 + (1/c)^2\cdot(\partial^2/\partial t^2) - (c\cdot m/\hbar)^2)\,\Phi = 0$）が得られる。
クライン－ゴルドン方程式は、スピンが整数のボーズ粒子の運動を規定する。従って電磁気力を媒介する光子などのゲージ粒子の運動を表すものと考えられる。
もし、光子に質量があれば、式⑯のラグラジアンに質量項$((c\cdot m/\hbar)^2\cdot\Phi\cdot\Phi)$が残る。それがディラック方程式とマクセル方程式からなるQEDのラグラジアン（式⑬）に付け加わってしまい、するとゲージ不変性が成り立たなくなる。それは現実に存在する自然法則に反するものと思われる。
以上のことから、あくまでゲージ不変性（ゲージ変換を施しても、ラグラジアンの形が変わらない）を保つためには、光子などのゲージ粒子の質量は”0”でなければならないことになる。

他の相互作用への応用

QEDと同様に、ある特定のラグラジアンを作れば、それがゲージ対称性を保つことを利用して、その他の力、強い力、弱い力も示すことができるかもしれない。そのことについて考察してみよう。

量子色力学（QCD） 強い力の働く仕組み （QCD ＝ Quantum chromo dynamics）

量子電磁気学と同様に、今度は強い力が働く仕組みについて考えてみよう。実験により以下のことが分かっている。
強い力はクォークにのみ働く。クォーク3つが集まれば、力を打ち消し合い安定する。それは電磁気力がプラスとマイナスがあって打ち消し合うのと同じである。
量子電磁気学では、ゲージ変換として、波動関数がθだけ位相がずれるものを考えた。これを一般化すると、

$\psi \rightarrow \psi'(x) = \mathrm{EXP}(-ic\cdot\theta)\cdot\psi(x) = \mathrm{U}(1)\,\psi(x)$ ・・・⑰ と書ける。U（1）は**ユニタリー演算子**であり、行列で表せば、U（1）は1×1の行列、すなわち1次元の変数である。もし$\psi(x)$が1成分ではなくn成分あれば、n×nのユニタリー行列として表される。つまり、 $\psi_i'(x) = \mathrm{U}(n)\,\psi_i(x)$ （i=1,2,3…n） となる。

ゲージ理論（QCD）

このユニタリー行列U（n）に数学的な条件つけて、行列式が1になるもの、すなわち、det（U（n））＝1　となるものを特に特殊ユニタリー行列と呼び、**SU（n）**と表す。
波動関数ψの座標変換（ユニタリー変換）は行列（エルミート行列H）の指数関数として記述され、すなわち、

$\psi \rightarrow \psi'(x) = SU(n)\ \psi_i(x) = \mathrm{EXP}(iH)\ \psi_i(x)$　・・・⑱　として表される。これは、⑰の拡張であり、一般的な座標変換（ユニタリー変換）についての、

ゲージ変換にあたる。（行列式が“1”である特殊ユニタリー変換は、座標変換で面積（体積）要素が変わらない（リウビルの定理）。即ち座標の回転と同じ操作）
※ユニタリー行列による座標変換は**群**をなす。特に（要素が）連続的に変化し微分可能な群は**リー群**と称す。リー群については、「**参考　リー代数**」を参照願います。

アイソスピンの考え方

原子核を構成する陽子と中性子は、電荷が異なるが質量がほぼ同じ（陽子＝938.3メガエレクトロンボルト、中性子＝939.6メガエレクトロンボルト）である。そこで二つの粒子は同じもので、**状態だけが異なる**ものと考える。これは素粒子研究の初期の段階から考えられた**アイソスピン**の考え方である。それによると二つ粒子は状態の違いのみを考慮して、核子（陽子および中性子を含む）の状態を示す波動関数として以下のように表される。

$\psi(x) = \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{pmatrix}$　ここでΦ_1　は陽子の状態を示す波動関数、Φ_2　は中性子の状態を示す波動関数とする。すなわちΦ_1が”1”でΦ_2が”0”なら$\psi(x)$　は陽子を表し、Φ_1が”0”でΦ_2が”1”なら$\psi(x)$　は中性子を表すものとみなす。

同様の考え方で、クォーク内、アップクォークu、ダウンクォークd、ストレンジクォークsも質量がほぼ同じ？と考えて、同じものの3つの状態の違いと考える。
※クォークの質量、u＝5メガエレクトロンボルト、d＝10メガエレクトロンボルト、s＝180メガエレクトロンボルト、（全然違うが、質量の差は電磁相互作用の違いによるものとみなす。苦しいこじ付け？　前出「素粒子の分類」参照）
上記核子の場合と同様に、

$\psi(x) = \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \end{pmatrix}$　と表す。$\begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \end{pmatrix}$　をまとめて、Φ_n　とおく。$\psi(x) = \Phi_n \quad (n=1,2,3)$・・・⑲

ここで、QEDと同じ考え方で、波動関数の位相を任意に変化させるゲージ変換を施してみる。ゲージ変換は即ちユニタリー変換であるから、

$\psi \rightarrow \psi'(x) = SU(3)\,\Phi_n$　ここでリー代数を使って、

$\psi \rightarrow \psi'(x) = \mathrm{EXP}(i\theta(x)\cdot T)\cdot\Phi_n$　・・・⑳　とする。（iは虚数単位、位相θは時空間座標xの関数、Tは3×3のエルミート行列）

一般にn×nのユニタリー行列Uは、n^2 個の独立した変数を持つ。さらに**SU（n）**は、det（U）＝1の制限を課すことにより変数の数は、n^2-1個となる。従って、エルミート行列Tの独立したものは、以下の8（=3×3－1）つが挙げられる。$T_a = (1/2)\lambda_a$　（a=1,2,3,4,5,6,7,8）とした際、

この8個の行列がゲージ粒子である8つのグルーオンの性質を表す
これらの行列はすべて
Tr（λ）＝0
※ただし、以下の行列は条件に沿った一つの例であり、式を満たすように、後から係数を設定する

$$\lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_8 = (1/\sqrt{3})\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

これらは**SU（3）**の場合の**ゲルマン行列**（上記行列は一例）として知られている。$\mathrm{Tr}(\lambda_a)=0$、$\mathrm{Tr}(T_a)=0$。T_a の交換関係は、$[T_a,\ T_b] = i f_{ab}^{c}\, T_c$を満たす。
※f_{ab}^{c} は交換関係が、T_cの一次結合で表した場合のT_aとT_bに依存した定数であり、**構造定数**と呼ばれる。（a，b，c=1,2,3,4,5,6,7,8）

参考　リー代数

群の定義

以下の条件を満たすものを”**群**“という。

（1）群はある特定の集合とその集合の元（要素）同士の演算として定義される
元として、a、b　その演算を　a･b　と表したとき、a･b＝c　もその集合の元である

（2）演算には、結合側が成り立つ　即ち　(a･b)･c＝a･(b･c)

（3）単位元が存在する　即ち、a･e＝e･a＝a　となるe　が存在する

（4）任意の元に対して逆元a^{-1}が存在する　即ち、$a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = e$　eは単位元

群の例

例として、元を整数全体、演算として足し算を考える。任意の整数a、b、cについて、a+b＝cのとき、cも整数となる。また単位元として、０　を考えれば、a+0＝0+a＝a　となる。さらに、aの逆元として、-aをとれば、a+(-a)＝(-a)+a＝0　（元が0の場合、逆元も0）

では、元を実数全体として、演算を掛け算とする。任意の整数a、b、cについて、a×b＝cのとき、cも実数となる。また単位元として、１　を考えれば、a×1＝1×a＝a　となる　さらに、aの逆元として、1/aをとれば、a×(1/a)＝(1/a)×a＝1となる。ただし、aが0の場合、1/aは実数ではない。（0も実数であるから、元といえる）　従って、この場合、これは**群ではない**

さらに、元の数が有限であれば、有限群。無限であれば、無限群。もし、a･b＝b･a（交換則）　が成り立つなら、この群を**可換群**またはアーベル群と呼ぶ。
演算を2種類考える。例えば、･　と　◦　。　このとき分配則　a◦(b･c)＝(a◦b)･(a◦c)が成り立つならば、この群を特別、“**環**”という。（ただし、演算･において、可換群であること）

行列とその積も群である。例えば、任意の複素数a，b，c，d，e，f，g，h　を要素として持つ、2×2の行列同士を掛け合わせたもの $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{pmatrix}$

も2×2の行列である。従って、一般的に単位行列および逆行列をもつ行列群（n×nの正方行列）とその積は、群をなす。

連続群　（リー群）

n×nの正方行列のn^2 個の要素が独立変数tによる連続関数かつ定義域において微分可能とした行列も群と考える。　例2×2の行列　$A(t) = \begin{pmatrix} f_{11}(t) & f_{21}(t) \\ f_{21}(t) & f_{22}(t) \end{pmatrix}$
（行列の要素は一般に複素数であるから、実数としてのパラメータの数は、$2n^2$ 個となる）
二つの変数t、uをパラメータとする、A(t)･A(u)を一次変換の合成と考えて、線形性から**A(t+u)**＝**A(t)･A(u)**である場合において、t=0、u=0のとき、**A(0)=A(0)･A(0)**。両辺に**A** $(0)^{-1}$をかけて、**I=A(0)**　を得る。（**I**は単位行列）　また、**A(t+u)**において、tを固定して、uで微分すると、d**A(t+u)**/du=d(**A(t)･A(u)**)／du=**A(t)･A’(u)**。u=0とすると、d**A(t)**／dt=**A(t)･A’(0)**。ここで、**A’(0)=T**とおくと、**A’(t)=TA(t)**　。これを微分方程式とみなして解くと、

$\mathbf{A}(t) = \mathrm{EXP}(t\cdot\mathbf{T})$　･･･(a)　となる。なお指数関数は級数にて展開され、$\mathbf{A}(t) = 1 + (t\cdot\mathbf{T})/1! + (t\cdot\mathbf{T})^2/2! + (t\cdot\mathbf{T})^3/3! + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (t\cdot\mathbf{T})^n/n!$
一般的に、行列**A**は式(a)のように指数関数に展開され、このとき**T**を**リー環**（の元）または**リー代数**という。

式(a)で、**A**をn×nのユニタリー行列　**U(n)**とすると、**U(n)**　＝　EXP(i**H**)　･･･(b)　とおける。（iは虚数単位）　このとき、行列**H**は、n×nの**エルミート行列**となる。

※エルミート行列とは、$\mathbf{H}^{\dagger} = \mathbf{H}$　となる正方行列である。”†”とは、行列の成分を転置して（行と列を入れ替えて）、複素共役をとったもの。即ち、行列を成分で書くと$(h^{ji})^{*} = h^{ij}$　これらの行列については、図17「シュレディンガー方程式の拡張･参考：行列力学」参照。

トレース　任意の正方行列**H**　について、その対角成分の和を**トレース**といい、$\mathrm{Tr}(\mathbf{H}) = \sum_{i=1}^{n} h_{ii}$と表す。

特殊ユニタリー行列　行列式が”1”のユニタリー行列を特殊ユニタリー行列といい、**SU(n)**　と書く。※　det(**U**)＝1
なお、式(b)より、特殊ユニタリー行列**SU(n)**のリー環**H**　のトレースは“0”となる。すなわち、det(**U(n)**)＝1　ならば、Tr(**H**)＝0

ゲージ理論（QCD）

QCDでのゲージ場

QEDにおけるゲージ場A を、$A \rightarrow A'_\mu = A_\mu + (1/e)\cdot\partial_\mu\theta$ とすると、QCDも同様に考えて、$A'^{a}_{\mu} = A^a_\mu - (1/g)\,\partial_\mu\theta_a$ ・・・❶ とする。（gはQEDの電荷に対応する色荷）

今、QCDにおけるディラック方程式のラグランジアン密度を（QEDと全く同じに）、
$\mathcal{L} = i\overline{\Phi}\cdot\gamma^\mu\cdot\partial_\mu\Phi - m\cdot\overline{\Phi}\cdot\Phi$ とおき、波動関数Φの無限小変換Φ‘を、⑳を使て、
1次までテイラー展開すると、

$\Phi' = \Phi_n + i\,\theta_a(x)\cdot T_a\cdot\Phi_n$ ・・・❷ （a=1,2,3,4,5,6,7,8、n=1,2,3） その共変微分は、

$\partial_\mu\Phi' = (1 + i\,\theta_a(x)\cdot T_a)\cdot\partial\,\Phi_n + iT_a\cdot\Phi_n\cdot\partial_\mu\theta_a(x)$ ・・・❸ ここで❷と❶により、

θ_a をA_aに置き換えると、ラグランジアン密度は、

$\mathcal{L} = i\overline{\Phi}\cdot\gamma^\mu\cdot\partial_\mu\Phi - m\cdot\overline{\Phi}\cdot\Phi - g\cdot\overline{\Phi}\cdot\gamma^\mu\cdot T_a\cdot\Phi\cdot A^a_\mu$ ・・・❹

QCDにおける力を伝える粒子（ゲージ粒子）であるグルーオンがつくる場を、QEDと同様に考える。4×4のテンソルである場の強さを$F^a_{\mu\nu}$ とすると、❹の形は以下となる。

$\mathcal{L} = i\overline{\Phi}\cdot\gamma^\mu\cdot\partial_\mu\Phi - m\cdot\overline{\Phi}\cdot\Phi - g\cdot\overline{\Phi}\cdot\gamma^\mu\cdot T_a\cdot\Phi\cdot A^a_\mu - (1/4)\cdot F^a_{\mu\nu}\cdot F^{\mu\nu}_a$

・・・❺ となる。（a=1,2,3,4,5,6,7,8、μ=1,2,3,4）

ここで、電磁気学のベクトルポテンシャルに対応するゲージ場A^a_μは3×3のテンソルであり、以下のように定義される。時空間の点xにおけるベクトルを$\Phi_i(x)$、そこから無限小離れた点x＋dxへ、ベクトルをそのまま平行移動させたものを$\Phi'_i(x+dx)$としたとき、

$\Phi'_i(x+dx) = \Phi_i(x) + ig\cdot(A^a_\mu(x))_i{}^j\cdot\Phi_j(x)\cdot dx^\mu$ ・・・❻ （i、j=1,2,3）

正味のベクトルの変化を$\Phi_i(x+dx)$ として差をとると、

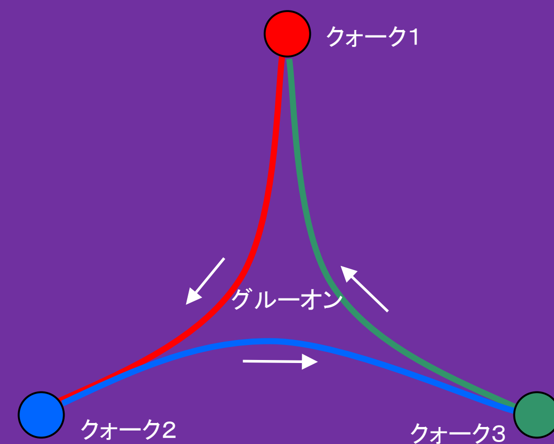
$\Phi'_i(x+dx) - \Phi_i(x+dx) = (\partial_\mu\Phi_i(x) - ig\cdot(A^a_\mu(x))_i{}^j\cdot\Phi_i(x))\cdot dx^\mu = D_\mu\Phi_i(x)\cdot dx^\mu$

・・・❼ ※ 演算子D は $D_\mu = \partial_\mu - ig\cdot(A^a_\mu(x))_i{}^j$

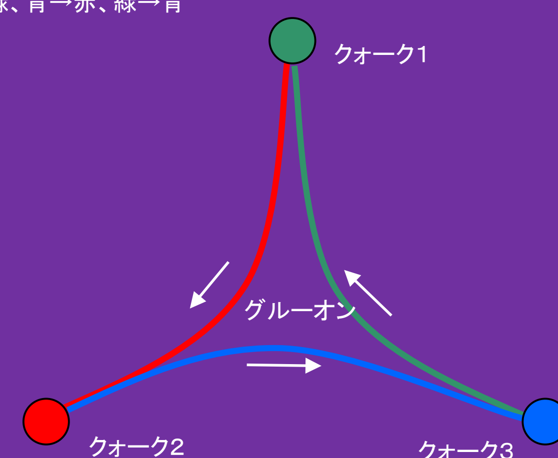
これは、アインシュタインの重力方程式を導出した際のリーマン曲率と同じ性質である。
ゲージ場$ig\cdot A$ がクリストフェルの記号Γ に対応。
図11「一般相対性理論」参照。

図2

強い力は、クォーク間のみに働く力である。クォークには電磁気力の電荷に匹敵する色荷（カラー）を持っている。電磁気力が働く際、光子を受け渡すのと同様、グルーオンという（ゲージ）粒子を受け渡す。その時カラー荷が変化する。カラー荷は電気のプラス、マイナスに匹敵する、レッド（赤）R、ブルー（青）B、グリーン（緑）Gの3種類がある。このカラー荷3つが合わさって初めて無色（中性）となり、力は相殺され、見かけ上働かなくなる。



グルーオンを受け渡すことにより、カラーが変化する。
赤→緑、青→赤、緑→青



ゲージ理論（弱い力の仕組み）

さらに、QED同様、場の強さ$F^a_{\mu\nu}$ を以下のように定義する。

$$F^a_{\mu\nu}(x) = (i/g)\cdot[D_\mu , D_\nu] = \partial_\mu A^a_\nu(x) - \partial_\nu A^a_\mu(x) - ig\cdot[A^a_\mu(x), A^a_\nu(x)] = \partial_\mu A^a_\nu(x) - \partial_\nu A^a_\mu(x) + \boxed{g\cdot f_{abc}\cdot A^b_\mu(x)\cdot A^c_\nu(x)} \quad \cdots ❽$$

式の解説　QCDにおけるラグラジアンアの性質

$$\mathcal{L} = \boxed{i\bar{\Phi}\cdot\gamma\cdot\partial_\mu\Phi - m\cdot\bar{\Phi}\cdot\Phi} - \boxed{g\cdot\bar{\Phi}\cdot\gamma\cdot T_a\cdot\Phi\cdot A_\mu} - \boxed{(1/4)\cdot F_{\mu\nu}\cdot F^{\mu\nu}}$$

クォークのディラック方程式。クォーク単体の振る舞いを示す

クォークと強い力の媒介粒子（ゲージ粒子）であるグルーオンとの相互作用を示す

グルーオンが作る場の性質を示す

QEDと比較するとこの項が新しく加わっている。これは、グルーオン同士の相互作用を表す。グルーオンにも色荷があり、互いに力を及ぼし合うことを示す。QEDの光子同士は、相互作用がない。

※QCDでは、QEDと違ってゲージが行列の形をしている。つまりゲージの連続的無限小変化は、行列の積となり非可換である。この理論を**非可換ゲージ理論**（ヤン＝ミルズ理論）という

弱い相互作用

同じような形で最後に、弱い力の作用を方程式として表してみたい。同様にアイソスピンの考え方を取り入れよう。中性子が電気を持たない陽子と同じものと考えたのと同様、ニュートリノを電子から電荷を取り去ったものと考える。その理由は、電子とニュートリノは電気的特徴以外は同じ性質を持つ。即ち、電子とニュートリノは同じもので、状態だけが異なる。
※実際は、電子とニュートリノは非常に異なる。電子は小さいけれど有限な質量を持ち、ニュートリノの質量はほとんどゼロ。似てないと考えるのが普通？

$$\psi(x) = \begin{pmatrix}\Phi_1\\ \Phi_2\end{pmatrix}$$ ここでΦ_1 は電子の状態を示す波動関数、 Φ_2 はニュートリノの状態を示す波動関数とする。すなわちΦ_1が”1”でΦ_2が”0”なら$\psi(x)$ は電子を表し、Φ_1が”0”でΦ_2が”1”なら$\psi(x)$ はニュートリノを表すものとみなす。
つまり、弱い力では、強い力の**SU（3）**に対して、**SU（2）**として、2×2の特殊ユニタリー群で表される。即ち、式⑳と同じく

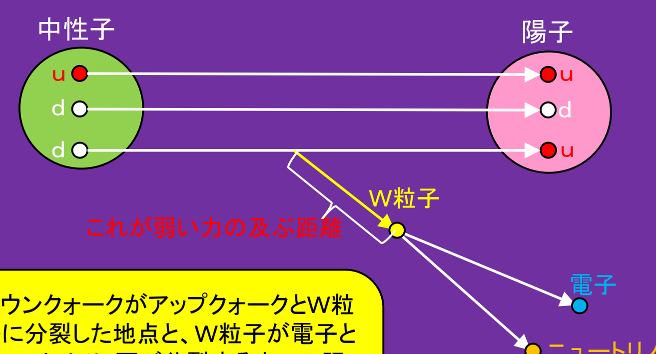
$$\psi'(x) = EXP(i\theta(x)\cdot T)\cdot\Phi_n$$ Tは2×2で、かつ$2^2-1=3$個のエルミート行列である。

ここでQCD同様にラグラジアン密度$\mathcal{L}$を考えれば、式❺と同じになるであろう。
ただし、ゲージ対称性という点で一つ問題が発生する。
図3で示した通り、ゲージ粒子としてQEDの光子、QCDのグルーオンと違い、このW粒子の到達距離は有限となる。即ちW粒子は質量を持つ。このことは$\mathcal{L}$が、ゲージ対称性を持たないという深刻な状況となることを意味している。それでは理論は成り立たないのである。

図3

弱い相互作用の最も有名な例として、ベータ崩壊を考える。ベータ崩壊では中性子が電子とニュートリノを放出して、陽子に変わる。実際はダウンクォークーつが、弱い力のゲージ粒子（力を伝える粒子）としてW粒子を放出しアップクォークに変わり、そのW粒子が電子とニュートリノに分裂する

陽子はアップクォーク2個、ダウンクォーク1個からなり、中性子はアップクォーク1個、ダウンクォーク2個からなる。中性子の一番下のダウンクォークがアップクォークに変わる。その際、W粒子を放出する



ダウンクォークがアップクォークとW粒子に分裂した地点と、W粒子が電子とニュートリノに再び分裂するまでの距離が即ち弱い力の到達距離となる。この距離は非常に短い、つまり有限である。このことはW粒子が大きな質量を持つことを意味する

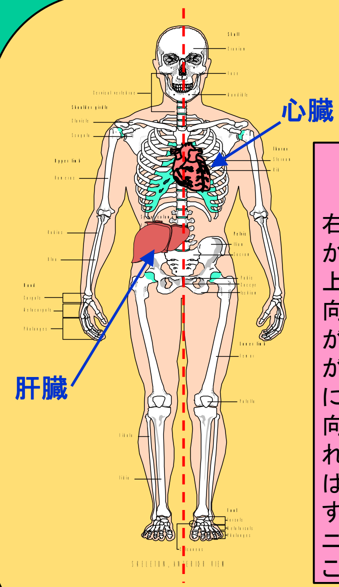
対称性の破れ

自然界には、必ずしも対称的でないものが存在する。次に示すものの中で左右が対称のもの（原子、雪の結晶、蝶の羽）もあるが、対称的ではないものも当然存在する。（人体の構造＝心臓や肝臓の位置は左右に偏っている）

ヒッグス機構

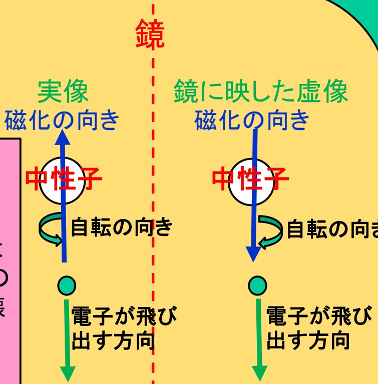
左右対称

左右非対称



パリティ対称性の破れ

右の図は、中性子を冷却した上で外から磁場をかける。すると、中性子は上方向に向きを揃える。つまり自転の向きが一定になる。そしてベータ崩壊が起きるまで待ち、どの方向に電子が飛び出すかを確かめる。実験結果によると電子は磁化の向きと反対方向にしか飛び出さないことが確かめられた。つまり、これを鏡に映した現象は起こらない。ということ。この鏡に映す操作をパリティ変換という。（これはニュートリノが左巻きしか存在しないことを示唆している）



パリティ変換

仮にもし、上にも下にも、方向に関係なく電子が飛び出せば、パリティ対称性は保たれることになる

もはや宇宙は左右非対称の（不完全な）世界となり果ててしまった

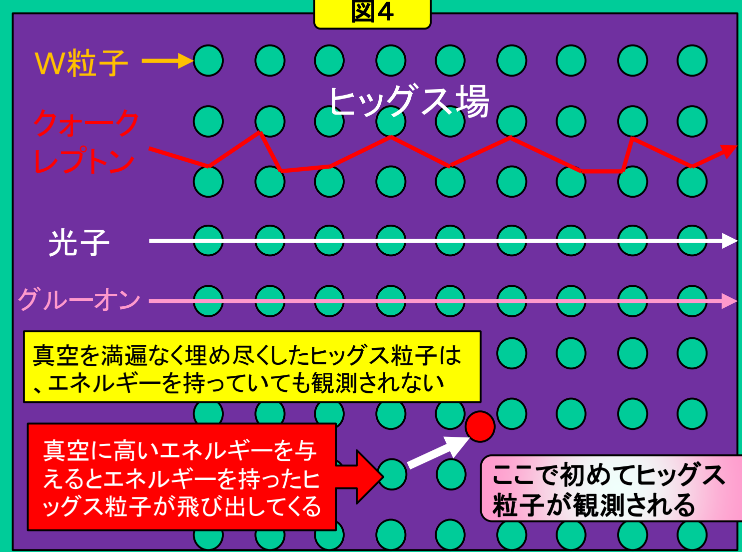
ヒッグス機構　W粒子が質量を持つ理由

・弱い力が群論的にSU（2）であるなら、ゲージ粒子は$2^2-1=3$種類存在する。これをW^+、W^-、W^0（$=Z^0$）と表す。W^+は＋e、W^-は−e、W^0は中性の電気をそれぞれ持つ。

・W粒子が質量を持つということは、光子と違って粒子の到達距離が有限であるということ。湯川理論（図29の「質量はなぜ存在するのか」参照）同様に考えると、到達距離が短いほどその質量は大きい。（W粒子の質量は、約800億電子ボルト＝陽子の100倍程度）

・では、なぜW粒子は質量を持つのか？
図4に示したように、何もない宇宙空間を、ある粒子（粒子A）が満遍なく覆っている場合を考える。この空間を真空という。粒子は結晶構造を持つ固体物質の原子の配列のように、規則的に配置されているものとする。その空間をある種の粒子（粒子B）が通過する際、AとBが相互作用しない場合は、Bは速度を落とすこともなく高速のまま無限の遠方まで移動できる。
それに対してAとBが相互作用する場合は、Aは速度を落とす。または粒子Aに進路を阻まれてそこで運動が停止してしまう。すなわち移動距離が有限となる。もしも空間に粒子Aが存在しなければ、粒子Bは光速で移動できるものとすると、粒子Aと相互作用しない光子やグルーオンの到達距離は無限大となる。すなわち光子、グルーオンの質量はゼロとなる。それに対してクォークやレプトンは粒子Aとの相互作用により、速度が光速以下となりかつ有限の質量を持つ。W粒子に至っては、到達距離が有限となり、大きな質量を持つ。この粒子Aをヒッグス粒子といい、ヒッグス粒子が作る空間（＝場）をヒッグス場と呼ぶ。ヒッグス場は、そのまま何もない空間（真空）であるため、ヒッグス場を形成しているヒッグス粒子は観測にかからない。その真空に高いエネルギーをかけることにより、エネルギーを持ったヒッグス粒子が飛び出してきて、そこで初めて観測される。これが2012年のCERNでのLHC（大型ハドロン衝突型加速器）による実験にてその存在が確認された。

図4

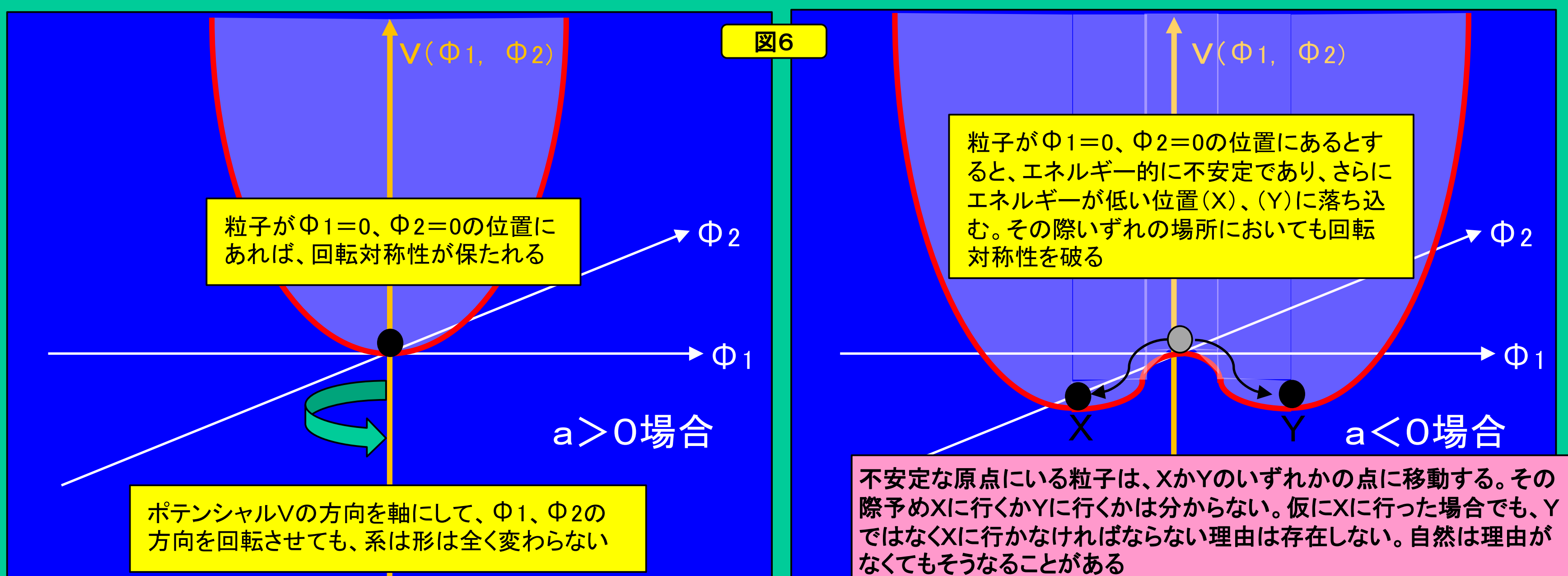


対称性の破れ

ヒッグス場とは、観測にかからないヒッグス粒子が満遍なくその空間を覆っているものである。ヒッグス粒子はスピンを持たないスカラー粒子と考える。ここでもしヒッグス粒子の一つにかすかな振動（位相の変化）が起きたら、その振動は隣の粒子に伝わり、さらに隣と、次々に振動が伝播されていく。これは一種の波（縦波）であり、それを粒子の運動と考えることもできる。これは質量ゼロで到達距離が無限大の粒子と同じであり、これを南部（注）＝ゴールドストンボゾンという。（注：南部陽一郎＝対称性の自発的破れの考えを示した物理学者）
宇宙誕生（ビッグバン）直後は、高温のためヒッグス粒子は空間を自由に飛び回っていた。この状態ではヒッグス場は作られていない。南部＝コールドストンボゾンも現れない。宇宙が冷えると、あたかも水蒸気が氷になるようにヒッグス粒子が氷の分子のように整列する。そこで初めて**対称性の破れ**が起こる。
この時ラグラジアンを古典論にならって、$\mathcal{L}$ ＝ **（運動エネルギー）** － **（ポテンシャルエネルギー）** として考える。ポテンシャルエネルギーを表すポテンシャル関数として、弱い力を示す**SU（2）**に従い、二つの波動関数Φ1とΦ2による2次元座標における回転群（数学的には**SO（2）**と表現する）として表したとき、その最もシンプルで完全な対称性を持つ形は、２次元平面におけるΦ1、Φ2 の原点からの距離＝ノルム（ $\Phi 1^2 + \Phi 2^2$ ）をベースに展開して、2次までとると、ポテンシャル関数は、

図5

$V(\Phi 1, \Phi 2) = a \cdot (\Phi 1^2 + \Phi 2^2) + b \cdot (\Phi 1^2 + \Phi 2^2)^2$ ・・・❾ となる。（a、bは任意の定数） これをグラフに示すと、



ここで、対称性が破れたa＜0の場合を考えよう。ポテンシャル関数の形は、中心が凹んだ瓶（ビール瓶）の底のような形をしている。中心（ Φ1＝0、Φ2＝0 となる位置）はエネルギーが高いので、そこにあった粒子はさらにエネルギーが低い場所（X）または（Y）に移動する。このように、中心からずれることにより、粒子が自ら対称

電磁気力と弱い力の統一

性を破ることを、「**自発的対称性の破れ**」という。 ※**自発的**とは、外からの作用を受けて対称性が壊れるのではなく、その粒子自身が自然に対称ではなくなること。

図6において、点(X)、(Y)は破線で示した円の一つの位置にあり、破線上はエネルギーの障壁がなくどこでも最低のエネルギー状態となっている。つまりここを運動する場合(図6ではξの矢印で示す)は、質量がゼロで到達距離が無限大の粒子となる。即ち、南部＝ゴールドストンボゾンに対応する。それに対して、その垂直方向の運動(図6では、ηの左右の矢印)では、原点方向のエネルギーの障壁と縁方向の障壁に挟まれたところでは、エネルギーが低い場合、その障壁に挟まれることにより、移動距離が有限となり質量を持つ(質量≠0)。これには縦波と横波が考えられ、横波成分を持つ複素スカラー粒子(スピン＝0)がヒッグス粒子に当たり、縦波成分を持つベクトル粒子(スピン＝1、注)が、ゲージ粒子(弱い力を伝える**W粒子**)に対応すると考える。

※注：成分として1,0,−1を3つがあり、光子と違って質量を持つことにより、0成分(縦波)が現れる。

この際、南部＝ゴールドストンボゾンの横波成分が、ゲージ粒子の縦波に化けることによって、南部＝ゴールドストンボゾンが実際は現れない仕組みとして捉えられる。このようにゲージ対称性が破られることにより生まれると考えられた南部＝ゴールドストンボゾンが、ゲージ粒子に質量を与える仕組みを**ヒッグス機構**という。

この状態における場の方程式について考えよう。

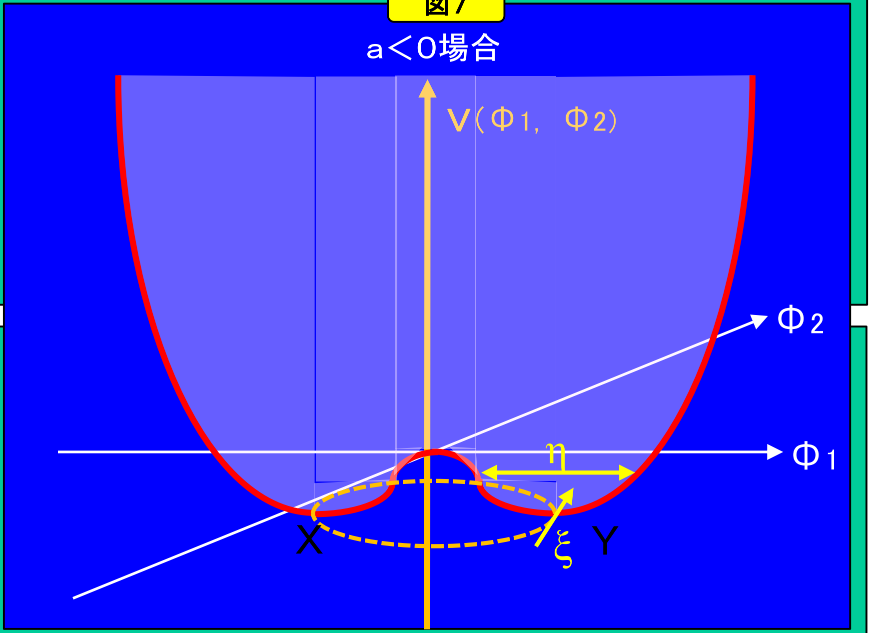
$\mathcal{L}$ ＝ (**運動エネルギー**) − (**ポテンシャルエネルギー**) ＝

$$(1/2)\cdot(\partial_\mu \Phi_i)^2 - |V(\Phi_i)| \quad \cdots⑩$$

古典力学における運動エネルギー＝(1/2)・mv^2 に対応させて、(∂Φ)を速度vに見立てている

今回の、$V=a\cdot(\Phi_1^2+\Phi_2^2)+b\cdot(\Phi_1^2+\Phi_2^2)^2$ に限らず、一般的なポテンシャル関数として表す

図7



電磁気力と弱い力の統一

弱い力は、電磁気力とその強さを比べるとはるかに弱い。しかし力を及ぼし合う粒子同士の距離が近づくにつれて力の強さは増す。つまりエネルギーが高いところでは二つの力の強さは同じになるかもしれない。

また図7のように、電荷が変化しない反応(電気的に中性(電荷を持たない)のZ粒子)においては、図1の電磁気力による作用(光子γの交換)の形と似ている。

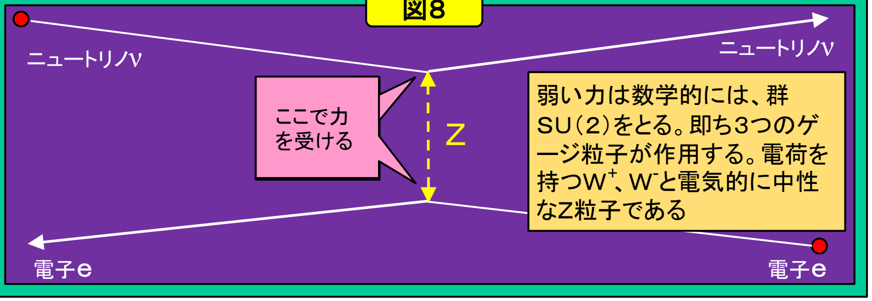
そこで、弱い力も電磁気力も同じ、即ち光子γとZ粒子はもともと同じもので状態のみが異なると考えて、アイソスピンのアイディアを導入する。

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} W \\ B \end{pmatrix} \quad \cdots⑪$$

Wは弱い力の基本粒子、Bは電磁気力の基本粒子。この二つの基本粒子が絡み合って様々な状態を作ると考える。

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} W \\ B \end{pmatrix} \quad \cdots⑫$$

図8



標準理論

ここで座標変換を2次元座標の回転（3次元空間でのZ軸の回りの回転）と考えると、

変換行列 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ は、$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ となる。（元の座標から角度 θ だけ回転）。よって⓬は

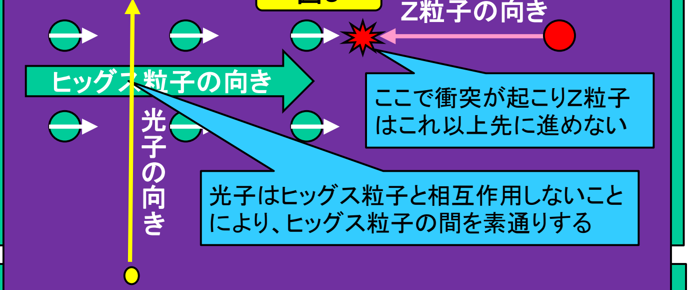
$$\left.\begin{aligned} Z &= W\cos\theta - B\sin\theta \\ A &= W\sin\theta + B\cos\theta \end{aligned}\right\} \cdots ⓭$$ となる。

ZとAは直角に交わる関係にあり、Zを弱い力の中性カレント（電荷を持たないゲージ粒子）として、これはヒッグス粒子ともろにぶつかることにより移動距離が有限となり、つまり質量を持つ。対してAは、ヒッグス粒子と相互作用せず、移動距離が無限大。つまり質量がゼロのゲージ粒子。即ちAは光子そのものとみなすことができる。このとき θ は、実験によって求められる角度で、特に**ワインバーグ角**と呼ばれる。
以上のように、アイソスピンの考え方を取り入れることにより、電磁気力と弱い力の統一が図られる。
この理論を発見者の名に因んで、**グラショウ−＝ワインバーグ＝サラム理論**（電弱理論）と名付けられる。

数学的（ユニタリー群の合成）表現

電弱理論での群の形としては、QEDにおけるU（1）と弱い力におけるSU（2）の合成と考える。数学的には、SU（2）　×　U（1）　と表される。
×は**直積**といい、SU（2）群の元を、a、b、c、d。U（1）群の元を、e　とすると、SU（2）　×　U（1）　の元は、a･e、b･e、c･e、d･eとなる。
一般に、SU（a）（a＝1, 2, 3･･･m）　と　SU（b）（b＝1, 2, 3･･･n）　とすると、SU（a）　×　SU（b）　の元の数は、m×n個となる

図9



ここで重要なポイントは、空間を埋め尽くした個々のヒッグス粒子がある特定の方向を向いているわけではないということ。あくまで計算上ゲージ粒子が衝突する割合を確率値として算出しているだけである。量子力学で得られるのは、あくまで確率の値（**割合**）のみである。
むしろヒッグス粒子がヒッグス場を形成している際は、個々のヒッグス粒子など存在していないとみなす。

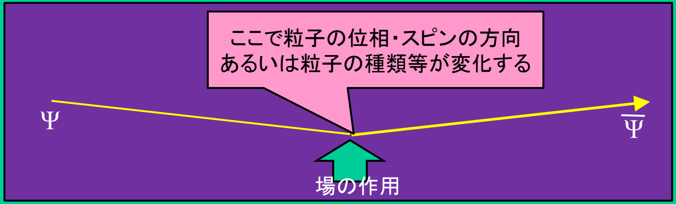
クォーク･レプトンとヒッグス粒子との相互作用

QEDで扱った、マクセル方程式をラグラジアン形式で表した際の第2項（$j \cdot A$）は、電磁場と電子（電子と光子）の相互作用を表していた。これに連続の方程式（$j^{\mu} = c \cdot \overline{\Psi} \cdot \gamma^{\mu} \cdot \Psi$）を代入したものを、クォークやレプトン（電子やニュートリノ）とヒッグス粒子との相互作用としても表せるとする。即ち、

$$\mathcal{L} = g \cdot \overline{\Psi} \cdot \gamma^{\mu} \cdot \Psi \cdot \Phi \quad \cdots ⓮$$

（電磁場を表すAをヒッグス場の“Φ”に置き換えるgは相互作用の強さを示す数値で、結合定数という）　この関係式を**湯川相互作用**という。

湯川相互作用のラグラジアン密度の式に示したように、Ψを元の粒子の状態、$\overline{\Psi}$を相互作用後の粒子の状態、相互作用を及ぼす場の状態をΦ（場の理論ではこれをΨに作用する演算子とみなせる）とすると、その反応の式は、⓮で示すことができる。



湯川相互作用

湯川理論によれば、陽子Pや中性子Nが原子核内で核力によって結びついているのは、互いにパイ中間子を受け渡しするためと考えられる。パイ中間子は、プラスの電荷を持つ　π^{+}、マイナスの電荷を持つ　π^{-}、および電荷を持たない　π^{0} の3つがある
それぞれの相互作用は以下

(1)P → P ＋ π^0 (2)P ＋ π^0 → P (3)P → N ＋ π^+ (4)P ＋ π^- → N
(5)N → N ＋ π^0 (6)N ＋ π^0 → N (7)N → P ＋ π^- (8)N ＋ π^+ → P

これらをラグラジアン形式で示すと、（Ψ_P は陽子、Ψ_N 中性子、Φはパイ中間子の状態）

(1)(2) $\mathcal{L} = g \cdot \overline{\Psi}_P \cdot \Psi_P \cdot \Phi$ (3)(4) $\mathcal{L} = g \cdot \overline{\Psi}_P \cdot \Psi_N \cdot \Phi$
(5)(6) $\mathcal{L} = g \cdot \overline{\Psi}_N \cdot \Psi_P \cdot \Phi$ (7)(8) $\mathcal{L} = g \cdot \overline{\Psi}_N \cdot \Psi_N \cdot \Phi$

標準理論

標準理論の数式

ここで最終的に、最初に示した素粒子「**標準理論**」の式を説明する。

1.「標準理論」A項

前出の式⑬と❺におけるゲージ場の性質を表す項は、電磁気力における場の強さを$B_{\mu\nu}$ 強い力における場の強さを$G^{a}_{\mu\nu}$（aはグルーオンの8つの種類を表す。a＝1，2，3，4，5，6，7，8） 弱い力における場の強さを$W^{b}_{\mu\nu}$（bはW粒子の3つの種類を表し、b＝1，2，3） とすると、

$\mathcal{L} = -(1/4)\cdot(B_{\mu\nu}\cdot B^{\mu\nu} + G^{a}_{\mu\nu}\cdot G^{\mu\nu}_{a} + W^{b}_{\mu\nu}\cdot W^{\mu\nu}_{b})$ となる。これを共通の場の強さ$F_{\mu\nu}$としてまとめたものが、「標準理論」のA項である。

2.「標準理論」B項

前出の式⑬と❺におけるクォーク、レプトンの性質を表す項はディラック方程式であり、

$\mathcal{L} = i\overline{\Phi}\cdot\gamma^{\mu}\cdot\partial_{\mu}\Phi - m\cdot\overline{\Phi}\cdot\Phi$ となる。また、それらの粒子とゲージ粒子（光子、グルーオン、W粒子）との相互作用を示す項は、

$\mathcal{L} = -\overline{g}\cdot\Phi\cdot\gamma^{\mu}\cdot T_{a}\cdot\Phi\cdot A_{\mu}$ （QCDの場合） 演算子を（$D_{\mu} = \partial_{\mu} - ig\cdot\gamma^{\mu}\cdot T_{a}\cdot\Phi\cdot A_{\mu}$）として、この二つをまとめると（QEDや弱い力の場合も同じ）、「標準理論」のB項になる。（$\not{D} = D_{\mu}\gamma^{\mu}$）

3.「標準理論」C項

前出の式⓮がクォーク・レプトンとヒッグス粒子の相互作用（湯川相互作用）を示し、「標準理論」のC項に当たる。クォーク・レプトンの動きにくさ、即ち慣性質量を表す

$\mathcal{L} = g\cdot\Psi\cdot\gamma^{\mu}\cdot\Psi\cdot\Phi$

4.「標準理論」D項

前出の式❿がD項に対応する。ゲージ粒子とヒッグス粒子の相互作用を示す。

$\mathcal{L} = (1/2)\cdot(\partial_{\mu}\Phi_{i})^{2} - |V(\Phi_{i})|$

ただし、数式における任意定数や関数は、実験結果に合うように決めておく必要がある

この「標準理論」は、現在知られている素粒子のすべての振る舞いを正確に記述できる。
ただし、「標準理論」は万能ではない。電磁気力と弱い力は統一されたが、強い力も含めた統一理論（大統一理論）が未完成。
さらに重力を含めた理論（超統一理論、超対称性理論、超弦理論）の構築が未完成となっている。

参考図書：「クォークとレプトン-現代素粒子物理学入門」F. ハルツェン、A. D. マーチン共著、小林澈郎　広瀬立成共訳（1986　倍風館）