

## ゲーデルの不完全性定理について

この宇宙のすべての情報が搭載されている万能のコンピュータがあるとします。このコンピュータに問い合わせれば、宇宙のあらゆることについて答えを導き出せるというものです。

宇宙のあらゆる情報で、まず真なる情報を集めます。

例えば日本の首都は東京、アメリカの首都はワシントン、イギリスはロンドンと言う具合（もちろん首都だけではない）に、大変な数にのぼります。それを記号で表すと、 $S_1$ 、 $S_2$ 、 $S_3 \dots$ と言う具合に並べることができます。

次に偽なる情報を集めます。

日本の首都は大阪、アメリカはニューヨーク、 $\dots$ という具合に、これも大変な数にのぼります。ただし、宇宙が有限ですので、情報の量も無限ではありません。同じように記号で書くと、 $S'_1$ 、 $S'_2$ 、 $S'_3 \dots$ と言う具合に並びます。

さらにこれらの情報から論理的に導かれるもの。

例えば「Aは真である」というのと、「AならばB」という二つのことから導かれるものとして「Bは真である」があります。このようなものを推論と言います。日常使っている電卓で、 $1+3$ と入力すると、答えは4になりますが、 $1+3=4$ という情報があらかじめ電卓の中に組み込まれているわけではありません。組み込まれているのは1とは何か？3とは何か？そして+というものはどういう意味か？そこから電卓が推論しているのです。これをズバリ計算と言います。

同じように、あらかじめ組み込まれている情報 $S_1$ 、 $S_2$ 、 $S_3 \dots$ から推論して得た、真なる情報と偽なる情報も組み込んで、すべての情報を足し込んだものが今万能コンピュータに答えが出せるすべてだとすると、コンピュータSを以下のように表すことができます。

$$S = S_1 + S_2 + S_3 + \dots (\text{真なる情報}) + S'_1, S'_2, S'_3 \dots (\text{偽なる情報}) + R_1 + R_2 + R_3 + \dots (\text{推論により得た真なる情報}) + R'_1 + R'_2 + R'_3 + \dots (\text{推論により得た偽なる情報})$$

この「S」にこの宇宙のあらゆることを尋ねれば、正しい答えを教えてくれる。まさに「S」は万能コンピュータです。この万能コンピュータを作ろうという試みがなされたのですが、ゲーデルの不完全性定理によって、そんな万能コンピュータなどは作れないことが示されたのです。

### 不完全性定理（第一不完全性定理）

システムが正常なら、そのシステムは不完全である。

システムとは理論体系のこと、具体的にはコンピュータのことですが、蓄積された情報と推論により、様々な答えを得る装置をシステムと呼びます。一人の人間もシステムの一つです。そのシステムが正常であるということは、証明可能（正しいことを証明することが可能）な命題がすべて「真」であり、反証可能（間違いであることを証明することが可能）な命題が「偽」である。という意味です。そのときシステムは不完全である。不完全とは、証明も反証もできない命題がシステム内に存在するところを意味します。

命題とは、 $\bigcirc\bigcirc$ は $\triangle\triangle$ である。という真偽（正しいか誤りか）を判定できる現実の状況を言語で表したものです。数学の式、 $1 + 1 = 2$  というのも命題だし、言語の「私は男です」というのも命題です。

ここでGという命題を想定しましょう。Gの中身は、「Gは証明可能ではない」というもの。さてこれは真偽が決定できるでしょうか？

もし、Gを「真」とすると、Gは証明できないとなります。真であることが証明できません。矛盾です。

もし、Gを「偽」とすると、Gは真であることが証明できることとなります。ところが最初に偽としています。これも矛盾です。

次にGの中身を、「Gは反証可能である」というものにしてみましょう。さてこれは真偽が決定できるでしょうか？

もし、Gを「真」とすると、Gは偽であることが証明できることとなります。ところが最初に真としています。これも矛盾です。

もし、Gを「偽」とすると、Gは偽であることが証明できないこととなります。ところが最初に偽としています。これも矛盾です。

さらにGの中身を、「Gは証明可能である」というものにしてみましょう。さてこれは真偽が決定できるでしょうか？

もし、Gを「真」とすると、Gは真であることが証明できることとなります。

ところが、Gを「偽」としても、Gは真であることが証明できないこととなります。最初に偽としていますから矛盾しません。つまり真でも偽でも成り立つのです。

最後にGの中身を、「Gは反証可能ではない」というものにしてみましょう。さてこれは真偽が決定できるでしょうか？

もし、Gを「真」とすると、Gは偽であることが証明できないこととなります。真でもいいのです。矛盾しません。

ところが、Gを「偽」としても、Gは偽であることが証明できることとなります。最初に偽としていますから矛盾しません。つまり真でも偽でも成り立つのです。

このように命題の中に命題が含まれるもの「自己言及」の命題は、真偽が決定できないということとなります。「自己言及」の命題は、たとえば「日本の首都は東京」と言うのとニュアンスが異なりますが、これも日常生活の中の言語としてはなくてはならないものです。たとえば上の「私は男です」も自分について語っていますが、「日本の首都は東京」と同じように、他人でも真偽が判定できますよね。それに対して「私は正直である」とか「私は嘘つきである」というのは本人しかわからないし、他者にとっては上で示したように、真偽が判定できない命題となります。

## 第二不完全性定理

システムが正常なら、そのシステムの無矛盾性を証明できない。

無矛盾性とは、命題が真でありかつ偽であるものはないということです。そんなものはシステムの中にはないはずですが、第二不完全性定理ではないとは言い切れないよ。というものです。

システムSはSが正しいことを前提としています。Sが正しいから、S内の命題が正しいもしくは正しくないことが保障されるのですが、Sが本当に正しいのか正しくないのかはS自体は答えられません。

だから、「もしSが偽であるならば、S1は真である」とは言えないのです。

結論、この宇宙には何でも答えられる万能コンピュータは製造不可能。答えられない命題が必ず存在する。

つまりこの世界は不完全であること。あるいは人間の理性には限界があるということ。この世界を超えたところに完全な神の国があるのか？あるいは人間の理性を超えた神が存在するのか？人間には解らない。存在するともいえるし、しないとも言える。